

# Essays on Model-Independent Super-Replication of Derivatives

都築幸宏

東京大学大学院 経済学研究科

2015 年 1 月 19 日

- ① 複数資産を原資産とするデリバティブの優劣複製
- ② 経路依存型デリバティブの優劣複製
- ③ 優劣複製取引戦略の改善
- ④ 密度関数の補正

# 研究の概要

## 研究の背景

- 金融実務におけるデリバティブの評価・リスク管理
  - モデル (株価などを表現する確率過程) を仮定し, デリバティブの価値を計算
  - モデルを仮定することは, モデル・リスクやモデル・パラメータの誤推定リスクに晒されていることになる (実際, ガウシアン・コピュラ・モデルは証券化商品のテイル・リスクを過小評価していた)
- デリバティブ市場の成熟化によるヘッジ手段の多様化
  - バニラ・オプション<sup>1</sup>と一部のエキゾティック・デリバティブはカリブレーション対象であり, ヘッジ・ツールとしても使える

## 研究の内容

- モデルに依存しないデリバティブの優劣複製および価格の上下限值
  - 複数資産を原資産とするデリバティブ (1 章) または経路依存型デリバティブ (2 章)
  - 複製手法は, 主にバニラ・オプションからなる静的または準静的ポートフォリオ
- モデル非依存な優劣複製の問題点と改善案
  - 問題点 1: 価格の上下限値は, かなり広いことが多い  
複数の取引に対して優劣複製手法を適用 (1,2 章)
  - 問題点 2: 最大損失・利益は確定するが, 損益の変動が大きい  
複製ポートフォリオを動的に更新する戦略により改善 (3 章)
- 密度関数の無裁定な補正方法 (4 章)
  - 漸近展開などの近似的な手法で計算したオプション価格は無裁定条件を満たしているとは限らないため, 無裁定条件を満たすように補正する手法を提案する

<sup>1</sup>ヨーロッパ型コール・オプション, プット・オプション

# 研究成果

- ① 複数資産を原資産とするデリバティブの優劣複製
  - [Tsuzuki, 2013] On Optimal Super-Hedging and Sub-Hedging Strategies. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2013, 16(6).
  - [Tsuzuki, 2011] Pricing Bounds on Quanto Options
- ② 経路依存型デリバティブの優劣複製
  - [Tsuzuki, 2014b] Pricing Bounds on Barrier Options, *Journal of Futures Markets*, 2014, 34(12):1170-1184.
  - [Tsuzuki, 2014a] No-Arbitrage Bounds on Two One-Touch Options
  - [Tsuzuki, 2015] No-Arbitrage Conditions for Barrier Options
- ③ 優劣複製取引戦略の改善
  - [Takahashi and Tsuzuki, 2011] Rebalancing Static Super-Replications
- ④ 密度関数の補正
  - [Takahashi and Tsuzuki, 2014] A New Improvement Scheme for Approximation Methods of Probability Density Functions, *Journal of Computational Finance*, forthcoming

# Outline

- 1 複数資産を原資産とするデリバティブの優劣複製
- 2 経路依存型デリバティブの優劣複製
- 3 優劣複製取引戦略の改善
- 4 密度関数の補正

# 先行研究と本研究

## 先行研究

- バスケット・オプションの優劣複製
  - [Laurence and Wang, 2003],[Hobson et al., 2005a],[Hobson et al., 2005b],[d'Aspremont and El-Ghaoui, 2006]
- スプレッド・オプション (クロス通貨オプション) の優劣複製
  - [Laurence and Wang, 2009],[Chung and Wang, 2008],[McCloud, 2011]
- クオント・オプションのプライシング
  - [Bennett and Kennedy, 2004],[Jäckel, 2009],[Jäckel, 2010],[Giese, 2012]

## 本研究の成果と貢献

- On Optimal Super-Hedging and Sub-Hedging Strategies, [Tsuzuki, 2013]
  - ペイオフが正の関数の積分であらわされるようなデリバティブに対して優劣複製手法を導出
  - 先行研究では個々のデリバティブについて研究しているが、これらのデリバティブを共通の枠組みで統一的に扱うことができる
  - 例:バスケット・オプション, スプレッド・オプション, クオント・オプション
- Pricing Bounds on Quanto Options, [Tsuzuki, 2011]
  - On Optimal Super-Hedging and Sub-Hedging Strategies の応用例
  - 優劣複製手法や価格の上下限値の研究はこれまでにない

# On Optimal Super-Hedging and Sub-Hedging Strategies I

$S^X$  と  $S^Y$  を2つの価格過程とし、 $X$  と  $Y$  をそれぞれ  $S^X$  と  $S^Y$  の関数とする満期  $T$  で次のペイオフを支払うデリバティブの優劣複製を考える:

$$\Phi(X, Y) := \int_{\alpha}^X \int_{\beta}^Y K(x, y) dy dx, \quad (1)$$

ただし、 $K: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  は可積分で、 $\alpha$  と  $\beta$  は、それぞれ  $X$  と  $Y$  の  $\inf$  より小さい実数とする。これは、バスケット・オプション、スプレッド・オプション、クオント・オプションを含む。

$X$  と  $Y$  の分布が既知であり、両者の依存関係に関する情報が全くない場合、このデリバティブ価格は次の区間に含まれる

$$\left[ \inf_C \mathbb{E}^C [\Phi(X, Y)], \sup_C \mathbb{E}^C [\Phi(X, Y)] \right], \quad (2)$$

ここで、 $C$  は確率測度で、 $X$  と  $Y$  はこの測度の下で与えられた分布に等しいものとする。以下、測度はこのような測度のみを考え、 $X$  と  $Y$  の同時分布に依存しない量を計算する場合は、 $\mathbb{Q}$  で代表する。 $X$  と  $Y$  の分布は

$$F(x) := \mathbb{Q}[X \leq x], G(y) := \mathbb{Q}[Y \leq y]. \quad (3)$$

## On Optimal Super-Hedging and Sub-Hedging Strategies II

Young の不等式より以下が成り立ち, このデリバティブが  $S^X$  のみに依存するペイオフをもつデリバティブと  $S^Y$  のみに依存するペイオフをもつデリバティブで優複製できることがわかる.

$$\int_{\alpha}^X \int_{f(\alpha)}^Y K(x, y) dy dx \leq \int_{\alpha}^X \left( \int_{f(\alpha)}^{f(x)} K(x, y) dy \right) dx + \int_{f(\alpha)}^Y \left( \int_{\alpha}^{f_{sup}^{-1}(y)} K(x, y) dx \right) dy, \quad (4)$$

ただし,  $f$  は単調非減少な可積分関数で,  $f(\alpha) = \beta$ ,

$$f_{sup}^{-1}(y) := \inf \{ x \in \mathbb{R} \mid y < f(x) \}. \quad (5)$$

とする. 例えば,  $X$  (または  $Y$ ) が  $S_T^X$  (または  $S_T^Y$ ) にのみ依存する場合は,  $S^X$  を原資産とする満期  $T$  のバニラ・オプションと  $S^Y$  を原資産とする満期  $T$  のバニラ・オプションにより, 複製ポートフォリオと構築することができる. ここで,  $f^*$  を次で定義し,  $f^*(\alpha) = \beta$  と拡張する.

$$f^*(x) := \inf \{ y \in \mathbb{R} \mid F(x) < G(y) \}. \quad (6)$$



# On Optimal Super-Hedging and Sub-Hedging Strategies III

特に  $f$  を  $f^*$  ととれば, 以下が成り立ち, 最良な優複製であることがわかる

$$\begin{aligned} \Phi(X, f^*(X)) &= \int_{\alpha}^X \left( \int_{f^*(\alpha)}^{f^*(x)} K(x, y) dy \right) dx \\ &+ \int_{f^*(\alpha)}^{f^*(X)} \left( \int_{\alpha}^{(f^*)_{sup}^{-1}(y)} K(x, y) dx \right) dy, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^M [\Phi(X, Y)] &= \mathbb{E} \left[ \int_{\alpha}^X \left( \int_{f^*(\alpha)}^{f^*(x)} K(x, y) dy \right) dx \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[ \int_{f^*(\alpha)}^Y \left( \int_{\alpha}^{(f^*)_{sup}^{-1}(y)} K(x, y) dx \right) dy \right], \quad (8) \end{aligned}$$

ただし,  $\mathbb{E}^M$  は, Maximum copula  $M$  により定まる確率測度の下での期待値であり,  $\mathbb{E}$  は  $\mathbb{Q}$  の下での期待値である.

## Pricing Bounds on Quanto Options I

クオント取引とは外貨建て資産に依存するペイオフ (外貨建て) を国内通貨に読み替えて、満期時点で支払う契約である。例えば、満期時点  $T$  の外貨建て資産を  $S_T^A$ 、為替レートを  $S_T^X$  とすると、ペイオフ関数を  $g$  とするクオント取引のペイオフは、国内通貨換算で

$$g(S_T^A) \quad (9)$$

であり、外貨換算では

$$\frac{1}{S_T^X} g(S_T^A) \quad (10)$$

である。市場でよく取引されているクオント取引は、

- クオント・フォワード契約:  $g(s) = s$
- クオント・コール・オプション:  $g(s) = (s - \kappa)_+$
- クオント・プット・オプション:  $g(s) = (\kappa - s)_+$

である。特に、クオント・フォワード契約は流動性が高く、カリブレーションに使われる ([Giese, 2012])。

## Pricing Bounds on Quanto Options II

$K = 1, X := \frac{1}{S_T^X}, Y := g(S_T^A)$  として, On Optimal Super-Hedging and Sub-Hedging Strategies の手法を適応すると, 優複製手法が得られる

$$\frac{1}{S_T^X} g(S_T^A) \leq \int_0^{\frac{1}{S_T^X}} f^*(x) dx + \int_0^{g(S_T^A)} (f^*)^{-1}(y) dy. \quad (11)$$

クオント・フォワード取引を複製に用いることができる場合は, ペイオフ  $g(s) - as$  ( $\forall a \in \mathbb{R}$ ) に優複製手法を適用することができ, さらに,  $a \in \mathbb{R}$  に関して最適化を行うことができる. クオント・フォワード取引の価値を  $F_0^g$  とすると, これらの取引戦略から得られるクオント取引の価格の上限は, 以下で表すことができる

$$V_G(a) := \sup_C \mathbb{E}^C \left[ \frac{1}{S_T^X} \left( g(S_T^A) - a S_T^A \right) \right] + a F_0^g, \quad (12)$$

$$V_G^* := \inf_{a \in \mathbb{R}} V_G(a) \quad (13)$$

劣複製と価格の下限についても同様にして得られる (本文参照).

## Pricing Bounds on Quanto Options III

数値例を以下に示す (詳細は本文参照).

strike	85	90	95	100	105	110	115
$C_G$	20.71	16.49	12.55	8.83	5.67	3.00	1.86
$C_G^*$	19.95	15.92	12.14	8.58	5.53	2.98	1.84
$C$	19.40	15.32	11.55	8.00	5.02	2.52	1.53
$C_L^*$	18.80	14.68	10.93	7.40	4.49	2.10	1.27
$C_L$	18.03	14.10	10.51	7.16	4.38	2.10	1.27
$C_G - C_L$	2.68	2.39	2.04	1.68	1.28	0.90	0.59
$C_G^* - C_L^*$	1.15	1.23	1.21	1.19	1.04	0.88	0.57

Table 1 : 数値例:クオント・コール・オプション

- $C_G, C_L$ : クオント・フォワード取引を使わない場合の価格の上限と下限
- $C_G^*, C_L^*$ : クオント・フォワード取引を使った場合の価格の上限と下限
- $C$ :  $S_T^X$  と  $S_T^A$  を独立とした場合の価格

# Outline

- 1 複数資産を原資産とするデリバティブの優劣複製
- 2 経路依存型デリバティブの優劣複製
- 3 優劣複製取引戦略の改善
- 4 密度関数の補正

# 先行研究と本研究 I

## 先行研究

### ● バリア・オプション

- モデル非依存な優劣複製 (原資産がマルチンゲールであることを仮定し, 取引戦略は準静的):

[Brown et al., 2001],[Neuberger and Hodges, 2000],[Cox and Oblój, 2011a],  
[Cox and Oblój, 2011b]

- モデル依存な優劣複製:[Maruhn, 2009]

- 複製:

[Bowie and Carr, 1994],[Carr and Chou, 1997],[Carr et al., 1998],[Fink, 2003],

### ● バリア・オプション以外のモデル非依存な優劣複製

- ルックバック・オプション:[Hobson, 1998]

- フォワード・スタート・オプション:[Hobson and Neuberger, 2012]

- バリアンス・スワップ:[Hobson and Klimmek, 2012],  
[Baldeaux and Rutkowski, 2010]

- 一般論 (martingale 制約の下での optimal transport 問題):  
[Beiglböck et al., 2013] など

### ● 経路依存型のデリバティブのモデル非依存な優劣複製の重要性

- モデルをバニラ・オプションに誤差なくカリブレーションできたとしても、モデルが記述する異なる時点間の原資産の同時分布はモデルごとに異なる

- 経路依存型のデリバティブは、この同時分布への依存度が高いため、モデル・リスクにさらされる

- [Hirsa et al., 2003],[Lipton and McGhee, 2002],[Schoutens et al., 2005]

## 先行研究と本研究 II

### 本研究の成果と貢献

- Pricing Bounds on Barrier Options, [Tsuzuki, 2014b]
  - バニラ・オプションとタッチ・オプションからなる静的取引戦略
  - 原資産がマルチンゲールであることは仮定しない
- No-Arbitrage Bounds on Two One-Touch Options, [Tsuzuki, 2014a]
  - 2つのタッチ・オプションが同時に取りうる価格の組を導出
  - 先行研究 ([Brown et al., 2001] など) と同様の前提
- No-Arbitrage Conditions for Barrier Options, [Tsuzuki, 2015]
  - 様々な条件のもとで、バリア・オプションが満たす無裁定価格の条件を導出
  - バニラ・オプションの研究 ([Davis and Hobson, 2007],[Carr and Madan, 2005],[Cousot, 2007] など) はあるが、バリア・オプションに関しては、本研究が初めてである

## Pricing Bounds on Barrier Options I

原資産価格過程を  $S_t, s_0 := S_0$  とする. 金利と配当は 0 とする.

満期  $T$  で  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  をノックアウトしなかった場合のペイオフ, ノックアウト条件を  $A^c$  ( $A := \{\tau \leq T\}$ ) とするバリア・オプションを考える. ただし,

$$\tau := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid S_t \notin I\}, \quad (14)$$

$I \subseteq \mathbb{R}$  は开区間 (バリア価格が  $L \in [0, s_0)$  の場合は,  $I := (L, +\infty)$ ). このバリア・オプションのペイオフは,

$$g(S_T)1_A. \quad (15)$$

ノックアウト条件が同じでペイオフが  $1_A$  であるバリア・オプションは, ノータッチ・オプションと呼ばれ, 比較的, 流動性が高い.

満期  $T$  のバニラ・オプションとノータッチ・オプション (価格を  $H_0$  とする) を使って, 上記のバリア・オプションの優劣複製を導出する. この仮定の下でのバリア・オプションの価格の上下限値は,

$$W_* := \inf \mathbb{E} [g(S_T)1_A], \quad (16)$$

$$W^* := \sup \mathbb{E} [g(S_T)1_A], \quad (17)$$

$\inf, \sup$  は, 満期  $T$  のバニラ・オプションとノータッチ・オプションの価格を再現する確率測度に関してである.



## Pricing Bounds on Barrier Options II

$\mathcal{A}_*, \mathcal{A}^*$  を区間  $I$  の部分集合で  $\sup_{s \in \mathcal{A}_*} g(s) \leq \inf_{s \notin \mathcal{A}_*} g(s)$   
 $\sup_{s \notin \mathcal{A}^*} g(s) \leq \inf_{s \in \mathcal{A}^*} g(s)$  とすると,

$$(g(S_T) - g_*)1_{\{S_T \in \mathcal{A}_*\}} + g_*1_A \quad (18)$$

$$\leq g(S_T)1_A \quad (19)$$

$$\leq (g(S_T) - g^*)1_{\{S_T \in \mathcal{A}^*\}} + g^*1_A, \quad (20)$$

ただし,

$$g_* \in [\sup_{s \in \mathcal{A}_*} g(s), \inf_{s \notin \mathcal{A}_*} g(s)], g^* \in [\sup_{s \notin \mathcal{A}^*} g(s), \inf_{s \in \mathcal{A}^*} g(s)]. \quad (21)$$

さらに,  $g_*$  と  $g^*$  を

$$\mathbb{Q}[g(S_T) < g_*] \leq H_0 \leq \mathbb{Q}[g(S_T) \leq g_*], \quad (22)$$

$$\mathbb{Q}[g^* < g(S_T)] \leq H_0 \leq \mathbb{Q}[g^* \leq g(S_T)] \quad (23)$$

を満たすようにとれば, 以下を満たす確率測度  $\mathbb{Q}_*, \mathbb{Q}^*$  が存在する

$$W_* = \mathbb{E}_* [(g(S_T) - g_*)1_{\{S_T \in \mathcal{A}_*\}} + g_*1_A], \quad (24)$$

$$W^* = \mathbb{E}^* [(g(S_T) - g^*)1_{\{S_T \in \mathcal{A}^*\}} + g^*1_A], \quad (25)$$

ただし,  $\mathbb{E}_*$  と  $\mathbb{E}^*$  はそれぞれ  $\mathbb{Q}_*, \mathbb{Q}^*$  による期待値.

# Pricing Bounds on Barrier Options III

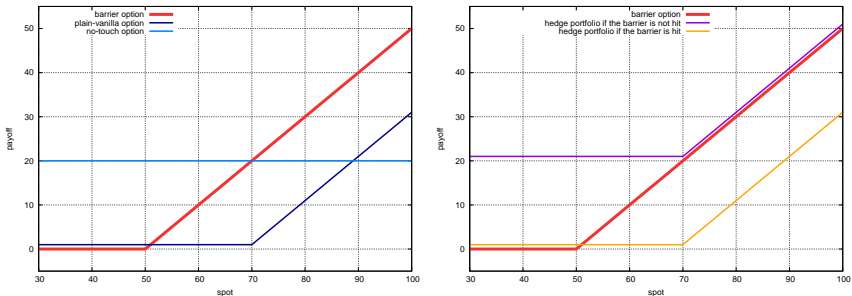


Figure 1 : ノックアウト・コール・オプションの優複製戦略

# Pricing Bounds on Barrier Options IV

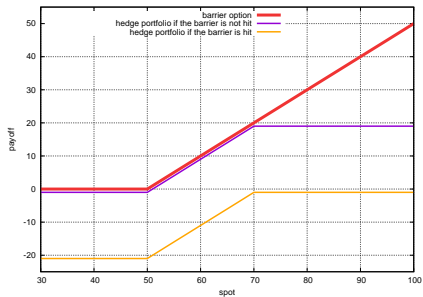
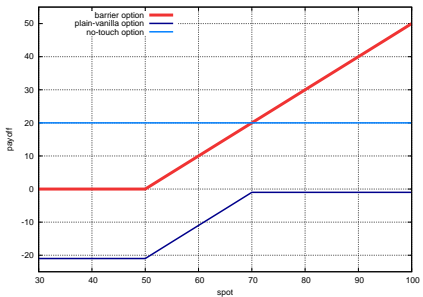


Figure 2 : ノックアウト・コール・オプションの劣複製戦略

## No-Arbitrage Bounds on Two One-Touch Options I

満期を  $T$  として、バリア価格が  $B_1$ , または  $B_2$  ( $s_0 < B_1 < B_2$ ) であるシングル・ワンタッチ・オプションが取引されているとする. この2つのワンタッチ・オプションがとり得る価格の範囲を求める.

バリア価格  $B_2$  のワンタッチ・オプションを使って, 以下のペイオフをもつタッチ/ノータッチ・オプションの優劣複製を考える:

$$1_{\{\tau_1 \leq T < \tau_2\}} = 1_{\{\tau_1 \leq T\}} - 1_{\{\tau_2 \leq T\}}, \quad (26)$$

ただし,  $\tau_1$  と  $\tau_2$  をバリア価格  $B_1$  and  $B_2$  に到達する時刻である:

$$\tau_i := \inf\{t \in [0, +\infty) \mid S_t \geq B_i\}, \quad (i = 1, 2). \quad (27)$$

以下の仮定の下で, 優複製を考える (劣複製については本文を参照).

- 金利, 配当は 0 として, 原資産価格過程は連続なものに限る
- 満期  $T$  のバニラ・オプションの価格は既知で, 原資産価格の時刻  $T$  の分布を  $\nu$  とする (行使価格  $K$  のオプション価格を  $C(K)$  とする)
- バリア価格  $B_2$  のワンタッチ・オプションの価格を  $O(B_2)$  とする

## No-Arbitrage Bounds on Two One-Touch Options II

優複製戦略  $G^B(K; B_1, B_2)$ 

## ① 時刻 0 において

- 行使価格  $K$  のコールオプションを  $\frac{1}{B_1 - K}$  単位購入
- 行使価格  $B_2$  のコールオプションを  $\frac{1}{B_1 - K}$  単位売却
- 行使価格  $B_2$  のデジタル・コールオプションを  $\frac{B_2 - K}{B_1 - K}$  単位売却
- バリア価格  $B_2$  のワンタッチ・オプションを  $\frac{B_2 - B_1}{B_1 - K}$  単位購入

② 時刻  $\tau_1$  において, フォワード契約を  $\frac{1}{B_1 - K}$  売却③ 時刻  $\tau_2$  において, フォワード契約を  $\frac{1}{B_1 - K}$  購入

$$G^B(K; B_1, B_2) := \frac{C(K) - C(B_2)}{B_1 - K} + \frac{B_2 - B_1}{B_1 - K} O(B_2) + \frac{B_2 - K}{B_1 - K} \frac{\partial C}{\partial K}(B_2), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} G_*^B(B_1, B_2) &:= \inf_{K \in [0, B_1]} G^B(K; B_1, B_2) \\ &= G^B(K_G^B(B_1, B_2); B_1, B_2) \end{aligned} \quad (29)$$

## No-Arbitrage Bounds on Two One-Touch Options III

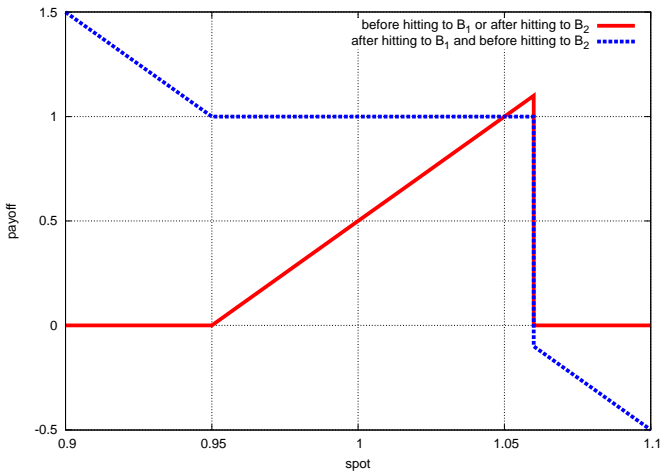


Figure 3 : 優複製戦略

## No-Arbitrage Bounds on Two One-Touch Options IV

最適取引戦略の最良性: 以下を満たす連続な martingale  $(\Omega^G, \mathcal{F}^G, \mathbb{Q}^G, \{S_t^G, \mathcal{F}_t^G\})$  が存在する

$$S_0^G = s_0, \quad (30)$$

$$S_T^G \sim \nu, \quad (31)$$

$$\mathbb{Q}^G \left[ \tau_2 \left( S^G \right) \leq T \right] = O(B_2), \quad (32)$$

$$\min \left\{ G_*^B(B_1, B_2), G_*(B_1) - O(B_2) \right\} = \mathbb{Q}^G \left[ \tau_1 \left( S^G \right) \leq T < \tau_2 \left( S^G \right) \right] \quad (33)$$

ここで,  $G_*(B_1) - O(B_2)$  は先行研究を使った優複製戦略の費用である:

- [Brown et al., 2001] の優複製戦略
- バリア価格  $B_2$  のワンタッチ・オプションを 1 単位売却

## No-Arbitrage Bounds on Two One-Touch Options V

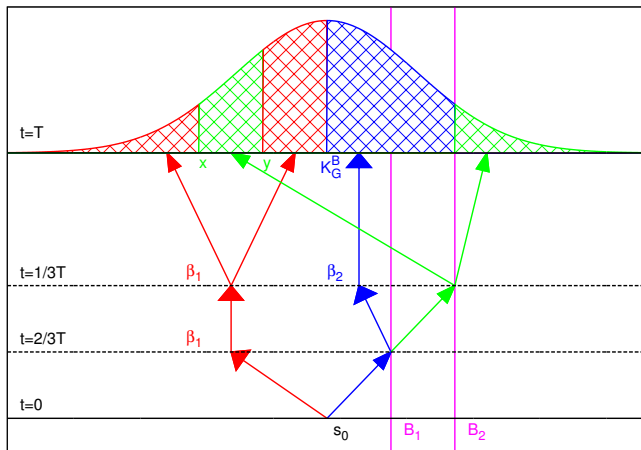


Figure 4 : 確率過程  $S_t^G$  :  $G_*^B(B_1, B_2) < G_*(B_1) - O(B_2)$  の場合



## No-Arbitrage Bounds on Two One-Touch Options VI

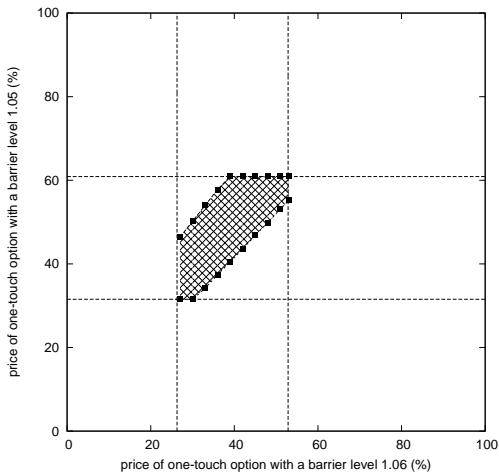


Figure 5 : 数値例 : 2つのOne-touch optionの取りうる価格

# No-Arbitrage Conditions for Barrier Options I

取引可能なデリバティブが以下の4つの場合について、バリア・オプションの価格の条件を調べる.

## case(1) 1 期間の無裁定条件

- 満期を  $T$  とする任意のペイオフのヨーロッパ・オプション
- 満期を  $T$  とするペイオフ  $g(S_T)1_A$  のノックアウト・オプション ( $g \in \mathcal{L}_\mu^1$ ).

## case(2) 流動性のあるバリア・オプションを使った価格の上下限值

- 満期を  $T$  とする任意のペイオフのヨーロッパ・オプション
- 満期を  $T$  とするペイオフ  $h_i(S_T)1_A$  のノックアウト・オプション ( $h_i \in \mathcal{L}_\mu^1, h_0 = 1, i = 0, \dots, K$ )

## case(3) タッチ・オプションの無裁定条件とバリア・オプション価格の上下限值

- 満期を  $T$  とする任意のペイオフのヨーロッパ・オプション
- 満期を  $T_n$  とし、バリア価格を  $L$  とするノータッチ・オプション、ノックアウト・フワード ( $n = 0, \dots, N, T_N = T$ )
- case(3) は single barrier を仮定する.

## case(4) 2 期間の無裁定条件

- 満期を  $T_i$  とする任意のペイオフのヨーロッパ・オプション ( $i = 1, 2$ )
- 満期を  $T_i$  とし、ペイオフを  $g(S_{T_i})1_{A_i}$  とするノックアウト・オプション ( $g \in \mathcal{L}_{\mu_i}^1$ ).

ただし、 $A, A_1, A_2$  はそれぞれ、満期  $T, T_1, T_2$  までのノック・アウトしない条件とし、 $\mu, \mu_1, \mu_2$  は、満期  $T, T_1, T_2$  のヨーロッパ・オプションから導出される原資産価格の分布とする.

## No-Arbitrage Conditions for Barrier Options II

本研究での無裁定の定義 ([Cox and Hobson, 2005] 参照)

- 与えられたデリバティブ価格  $\{V_0^\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$  に対し,  $\{D_{0,t}^{r/q} S_t\}_{t \in [0, T^*)}$  が離散時間, または連続時間に関して martingale で,  $V_0^\alpha = D_{0, T_\alpha}^r \mathbb{E}[V_{T_\alpha}]$  となるような確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}, \{\mathcal{F}_t\})$  が存在する.
- 以下, このような確率空間を離散時間, または連続時間 model と呼ぶ

仮定と記号:

- 金利・配当は確定的とし,  $D_{0,t}^r := e^{\int_0^t -r_s ds}$ ,  $D_{0,t}^q := e^{\int_0^t -q_s ds}$ ,  $D_{0,t}^{r/q} := \frac{D_{0,t}^r}{D_{0,t}^q}$  とする.
- $T_0 = 0 < T_1 < \dots < T_N = T$ ,  $\Delta_n := (T_{n-1}, T_n]$  ( $n = 1, \dots, N$ ) とし,  $D_{0,t}^r, D_{0,t}^q$  は  $\Delta_n$  で定数で,  $\Delta_N$  で 1 とする
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$  は,  $K$ -次元ユークリッド空間の内積
- $\delta_x$  は  $x \in \mathbb{R}_+$  を中心とする Dirac のデルタ関数
- $\preceq$  は convex order を表す

$$\mathcal{K}_\mu := \{\alpha \in \mathcal{L}_\mu^\infty \mid 0 \leq \alpha \leq 1, \alpha 1_{I^c} = 0\} \quad (34)$$

$$\langle f, g \rangle_\mu := \int f g \mu \quad (35)$$

## No-Arbitrage Conditions for Barrier Options III

case(1) 1 期間の無裁定条件:

ペイオフが  $g1_A$  のバリア・オプションの価格を  $\Phi(g)$  とすると, 以下は同値:

- (a)  $\Phi(g) = \langle g, \alpha \rangle_\mu, \forall g \in \mathcal{L}_\mu^1$  を満たす  $\alpha \in \mathcal{K}_\mu$  が存在する.
- (b) 離散時間  $\{0, T\}$  モデルが存在する

特に,  $D_{t,T}^{q/r} = 1 (t \in [0, T])$  の場合, 連続時間モデルが存在することと, (a) と以下が成り立つことは同値:

- single barrier の場合:  $\beta \notin I$

$$\beta := \frac{\int s(1 - \alpha(s))\mu(ds)}{\int (1 - \alpha(s))\mu(ds)}, \quad (36)$$

- double barrier の場合:  $\beta_L < L, \beta_U > U$

$$\beta_L := \frac{\int_{[0,c]} s(1 - \alpha(s))\mu(ds) + \theta c(1 - \alpha(c))\mu(\{c\})}{\int_{[0,c]} (1 - \alpha(s))\mu(ds) + \theta(1 - \alpha(c))\mu(\{c\})}, \quad (37)$$

$$\beta_U := \frac{\int_{(c,+\infty)} s(1 - \alpha(s))\mu(ds) + (1 - \theta)c(1 - \alpha(c))\mu(\{c\})}{\int_{(c,+\infty)} (1 - \alpha(s))\mu(ds) + (1 - \theta)(1 - \alpha(c))\mu(\{c\})}. \quad (38)$$

を満たす  $c \in \mathbb{R}$  と  $\theta \in [0, 1]$  が存在する.

## No-Arbitrage Conditions for Barrier Options IV

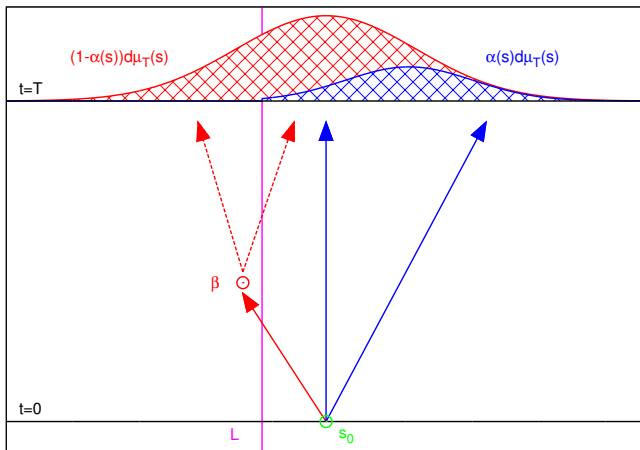


Figure 6 : case(1) : 無裁定価格を導出する原資産過程

## No-Arbitrage Conditions for Barrier Options V

case(2) 流動性のあるバリア・オプションを使った価格の上下限值:

流動性のあるバリア・オプションのペイオフを  $h_i(S_T)1_A$ , 価格を  $D_{0,T}^r H_i$  とし, 特に  $h_0 = 1$  とする ( $i = 0, \dots, K$ ).  $\alpha_g^G, \alpha_g^L$  をペイオフを  $g$  とするノックアウト・オプションの上限, 下限を与える  $\mathcal{K}_\mu$  の元,

$h := (h_i)_{i=1}^K, H := (H_i)_{i=1}^K$  とする.

流動的なバリア・オプションを  $x \in \mathbb{R}^K$  単位使った複製ポートフォリオの価格は,  $W_g^*(x)$  で表される:

$$\Psi_y := \alpha_{g - \langle y, h \rangle_K}^G, \quad (39)$$

$$W_g(x, y) := \langle g - \langle x, h \rangle_K, \Psi_y \rangle + \langle x, H \rangle_K, \quad (40)$$

$$W_g^*(x) := W_g(x, x) = W_{g - \langle x, h \rangle_K}^G. \quad (41)$$

$\langle x, H \rangle_K > \langle \langle x, h \rangle_K, \alpha_{\langle x, h \rangle_K}^L \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^K$  であれば,

$W_g^*(x^*) = \inf_{x \in \mathbb{R}^K} W_g^*(x), \langle h_k, \Psi_{x^*} \rangle = H_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) を満たす  $x^* \in \mathbb{R}^K$  が存在する ([Tsunami, 2014b] の拡張).

## No-Arbitrage Conditions for Barrier Options VI

case(3) タッチ・オプションの無裁定条件とバリア・オプション価格の上下限值:

動機: [Tsuzuki, 2014b] に原資産の martingale 条件を追加するとどうなるか?

ペイオフが時刻  $T$  で支払われ, バリアの判定が  $\Delta_n$  に限定されたワンタッチ・オプション, ノックイン・フォワードの価格を  $O_{0,T}^{\Delta_n}, O_{0,T}^{\Delta_n,A}$  とする.

$$p_n := \frac{O_{0,T}^{\Delta_n}}{D_{0,T}^r}, \quad q_n := \frac{D_{0,T}^r - \sum_{k=1}^n O_{0,T}^{\Delta_k}}{D_{0,T}^r}, \quad (42)$$

$$x_n := \frac{O_{0,T}^{\Delta_n,A}}{O_{0,T}^{\Delta_n}}, \quad y_n := \frac{D_{0,T}^q s_0 - \sum_{k=1}^n O_{0,T}^{\Delta_k,A}}{D_{0,T}^r - \sum_{k=1}^n O_{0,T}^{\Delta_k}}, \quad (43)$$

$\nu := q_N \delta_{y_N}, \nu^c := \sum_{n=1}^N p_n \delta_{x_n}$ , 測度  $\mu_N$  を  
 $q_N = \mu_N(\mathbb{R}_+), q_N y_N = \int x \mu_N(dx)$  であるような測度  $\mu$  の convex order の  
 意味で最小の制限とし,  $\mu_N^c := \mu - \mu_N$  とする. ただし, 制限とは  
 $\mu_N(\cdot) = \mu(\cdot \cap \Omega)$  となる Borel 集合  $\Omega \subseteq \mathbb{R}_+$  が存在することとする.

## No-Arbitrage Conditions for Barrier Options VII

- $O_{0,T}^{\Delta_n}, O_{0,T}^{\Delta_n, A}$  の無裁定条件:

$$(A1) \quad \mu_N(I^c) = 0, \quad x_n \leq D_{T_n, T}^{q/r} L < y_n \quad (n = 1, \dots, N),$$

$$(A2) \quad \nu^c \preceq \mu_N^c.$$

が成り立つならば、連続時間 model が存在する. 逆に、連続時間 model  $\mathbb{Q}$  が存在すれば、 $\tilde{\mu}_N, \tilde{\mu}_N^c := \mu - \tilde{\mu}_N$  として (A1) と (A2) が成り立つ. ただし、 $\tilde{\mu}_N([a, b)) := \mathbb{Q}[S_T \in [a, b), \tau > T]$  for  $a, b \in \mathbb{R}_+$ .

- バリア・オプションの価格の上下限值:

$\langle x, H \rangle_K > \left\langle \langle x, h \rangle_K, \alpha_{\langle x, h \rangle_K}^L \right\rangle_{\mu}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^K$  とする.  $g \in \mathcal{L}^1$ , 測度  $\lambda$  を測度  $\mu$  の制限で  $q_N = \lambda(\mathbb{R}_+), q_N y_N = \int x \lambda(dx), x^* \in \mathbb{R}$  を

$$W_g^*(x^*) = \int (g(s) - x^* s) \lambda(ds) + x^* H \quad (44)$$

とする.  $\lambda, \lambda^c := \mu - \lambda$  について (A1) と (A2) が成り立てば、ノックアウト・オプション価格を  $D_{0,T}^r W_g^*(x^*)$  とする連続時間 model が存在する

- 特に、金利・配当が 0 で、原資産価格が連続な場合は、ノックアウト・オプション価格の上下限值にとって、 $O_{0,T}^{\Delta_n}, O_{0,T}^{\Delta_n, A}$  の情報に価値はない



## No-Arbitrage Conditions for Barrier Options VIII

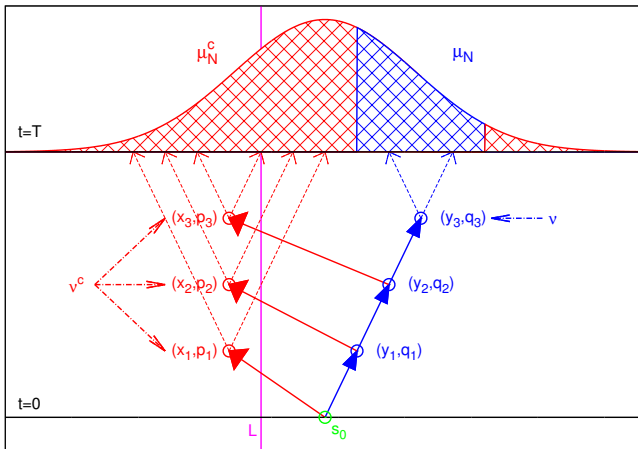


Figure 7 : case(3) : 無裁定価格を導出する原資産過程

## No-Arbitrage Conditions for Barrier Options IX

case(4) 2 期間の無裁定条件:

取引可能なデリバティブから  $\alpha_i \in \mathcal{K}_{\mu_i}$ ,  $i = 1, 2$  が得られる.  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\mu}_1$  を  $\alpha_1, \mu_1$  の  $T_2$ -フォワード価格に変換した関数, 測度とする.

以下を満たす  $\alpha_{12} \in \mathcal{L}_{\mu_2}^\infty$  が存在するならば, 連続時間 model が存在する:

- $\mathbb{R}_+$  上で,  $\alpha_2 \leq \alpha_{12}$ ,
- $\int_0^{+\infty} s^m \tilde{\alpha}_1(s) \tilde{\mu}_1(ds) = \int_0^{+\infty} s^m \alpha_{12}(s) \mu_2(ds)$  ( $m = 0, 1$ ),
- $\tilde{\alpha}_1 d\tilde{\mu}_1 \preceq \alpha_{12} d\mu_2$ ,  $(1 - \tilde{\alpha}_1) d\tilde{\mu}_1 \preceq (1 - \alpha_{12}) d\mu_2$ .
- single barrier の場合:  $\tilde{\alpha}_1 d\tilde{\mu}_1 \preceq d\mu_{12}^S$ ,  $\beta \notin I$ .
- double barrier の場合:  $\exists c \in I$ ,  $\exists \theta \in [0, 1]$  s.t.  $\tilde{\alpha}_1 d\tilde{\mu}_1 \preceq d\mu_{12}^D$ ,  $\beta_L \leq L$ ,  $\beta_U \geq U$ .

逆に, 連続時間 model が存在すれば,  $\alpha_{12}(s) = \mathbb{E}[1_{A_1} | S_{T_2} = s]$  として, 上の条件が成り立つ. ただし,  $\mu_{12}^S, \mu_{12}^D, \beta, \beta_L, \beta_U$  は, 次で定義する.

## No-Arbitrage Conditions for Barrier Options X

$$\mu_{12}^S(B) := \frac{1}{n_1} \int_B \alpha_2 d\mu_2 + \frac{n_1 - n_2}{n_1} \delta_\beta(B), \quad (45)$$

$$\beta := \frac{1}{n_1 - n_2} \int_0^{+\infty} s(\alpha_{12}(s) - \alpha_2(s)) \mu_2(ds), \quad (46)$$

$$\mu_{12}^D(B) := \frac{1}{n_1} \int_B \alpha_2 d\mu_2 + \frac{n_L}{n_1} \delta_{\beta_L}(B) + \frac{n_U}{n_1} \delta_{\beta_U}(B), \quad (47)$$

$$n_L := \int_{[0,c)} (\alpha_{12} - \alpha_2) d\mu_2 + \theta(\alpha_{12}(c) - \alpha_2(c)) \mu_2(\{c\}) \quad (48)$$

$$n_U := n_1 - n_2 - n_L, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} n_L \beta_L &:= \int_{[0,c)} s(\alpha_{12}(s) - \alpha_2(s)) \mu_2(ds) \\ &+ c\theta(\alpha_{12}(c) - \alpha_2(c)) \mu_2(\{c\}), \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} n_U \beta_U &:= \int_{(c,+\infty)} s(\alpha_{12}(s) - \alpha_2(s)) \mu_2(ds) \\ &+ c(1 - \theta)(\alpha_{12}(c) - \alpha_2(c)) \mu_2(\{c\}). \end{aligned} \quad (51)$$

## No-Arbitrage Conditions for Barrier Options XI

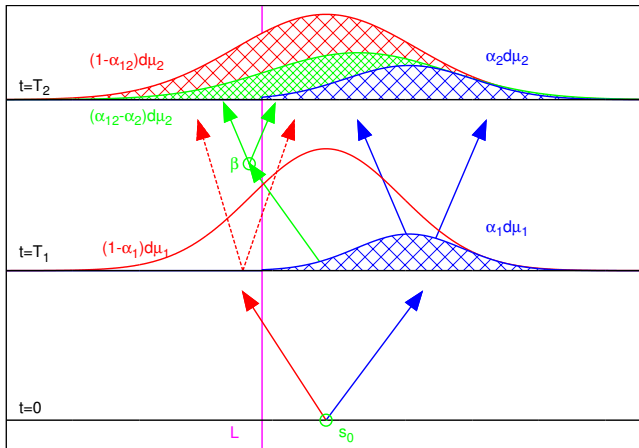


Figure 8 : case(4) : 無裁定価格を導出する原資産過程

# Outline

- 1 複数資産を原資産とするデリバティブの優劣複製
- 2 経路依存型デリバティブの優劣複製
- 3 優劣複製取引戦略の改善**
- 4 密度関数の補正

# 先行研究と本研究

## 背景と先行研究

- モデル非依存な優劣複製の問題点
  - (1) 価格の上下限界がかなり広い
  - (2) 最大損失・利益が限定されるが、損益の分散が大きい
- 先行研究
  - (1) に関しては、ポートフォリオに対して優劣複製を適用したり、流動性のあるデリバティブを使うなどにより改善される (1,2 章)
  - (2) に関しては,[Takahashi and Tsuzuki, 2011] で考察する手法が [Neuberger and Hodges, 2000] でバリア・オプションの数値例の一部として紹介されている

## 本研究の成果と貢献

- Rebalancing Static Super-Replications, [Takahashi and Tsuzuki, 2011]
  - 1,2 章で導出したような静的・準静的な優劣複製ポートフォリオを動的に更新する取引戦略を分析する
  - この取引は、取引の満期を待たずに初期時点払った費用の一部を回収できるため、損益の変動を小さくする効果がある
  - [Neuberger and Hodges, 2000] では数値実験的な考察にとどまっているのに対し、この研究では複製対象のデリバティブを限定せず一般的な枠組みで、この戦略の損益を数式を用い表現し、特徴を分析している

## Rebalancing Static Super-Replications I

1,2 章で導出したような静的・準静的な優劣複製ポートフォリオを動的に更新する取引戦略を分析する. 以下を仮定する:

- 任意の行使価格  $K$  に対し優複製する戦略がひとつ定まるとし, この優複製ポートフォリオの時刻  $t$  における価格が  $H_t(x, K)$  で表されたとする ( $x$  は優複製ポートフォリオの価格が依存する変数で,  $x \in \mathbb{R}^N$  とする).
- $\partial$  で微分を表し, すべての関数は各変数に関して十分なめらかであるとする.
- 金利は, 0 とする
- $H_t^*(x)$  を最良優複製戦略のポートフォリオの価格,  $K^*(t, x)$  をそれを与える行使価格とし

$$\begin{aligned} H_t^*(x) &:= \inf_{K>0} H_t(x, K) \\ &= H_t(x, K^*(t, x)), \end{aligned} \quad (52)$$

以下を仮定する:

$$\partial_K H_t(x, K^*(t, x)) = 0, \quad (53)$$

$$\partial_{KK} H_t(x, K^*(t, x)) > 0. \quad (54)$$

## Rebalancing Static Super-Replications II

市場変数  $X$  の過程を  $X_t := X_0 + A_t + M_t$  ( $A$  は有界変動過程で,  $M$  は local martingale) とすれば,  $\{H_t^*\}_{t \in [0, T]}$  は super-martingale で, 次のように分解できる:

$$H_t^* = H_0^* - A_t^* + M_t^*, \quad (55)$$

$\{A_t^*\}_{t \in [0, T]}$  は増加過程であり,  $\{M_t^*\}_{t \in [0, T]}$  は, local martingale である

$$A_t^* = \int_0^t \partial_{KK} H_s(X_s, K_s^*) d\langle K^* \rangle_s, \quad (56)$$

$$M_t^* = \sum_{i=1}^N \int_0^t \partial_{x_i} H_s(X_s, K_s^*) dM_s^{(i)}. \quad (57)$$

$H_t^*$  は優複製ポートフォリオを連続的に更新した過程であり,  $A_t^*$  は更新したときに得られる正のキャッシュフローの累積を表す. これは, 最適行使価格  $K^*$  の 2 次変動と  $H$  の 2 階微分に依存することがわかる.



## Rebalancing Static Super-Replications III

スプレッド・オプション(クロス通貨オプション)の場合:

時刻  $T$  で2つの資産 ( $X_t$  と  $Y_t$  を時刻  $t$  の価格とする) を交換するオプションは,  $X$  のコール・オプションと  $Y$  のプット・オプションにより優複製できる:

$$(X_T - Y_T)_+ \leq (X_T - K)_+ + (K - Y_T)_+, \quad \forall K \in \mathbb{R}_+. \quad (58)$$

最適な行使価格  $K_t^*$  は, 次式により決まる:

$$\partial_K C_t^X(K_t^*) = \partial_K P_t^Y(K_t^*), \quad (59)$$

ただし,  $C_t^X(K), P_t^Y(K)$  は, それぞれ  $X, Y$  を原資産とし, 行使価格を  $K$  とするコール・オプションとプット・オプションとする.

$$\begin{aligned} \langle K^* \rangle_t &\approx \int_0^t (\partial_x K_s^*)^2 d\langle X \rangle_s + \int_0^t (\partial_y K_s^*)^2 d\langle Y \rangle_s \\ &\quad + 2 \int_0^t \partial_x K_s^* \partial_y K_s^* d\langle X, Y \rangle_s, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\partial_{KK} H(t, X_t, Y_t, K_t^*) = \partial_{KK} C_t^X(K_t^*) + \partial_{KK} P_t^Y(K_t^*), \quad (61)$$

たいていのモデルでは,  $\partial_x K_s^* \partial_y K_s^* \geq 0$  であり,  $\langle K^* \rangle$  は  $X$  と  $Y$  の相関に関して単調増加であることがわかる.

# Rebalancing Static Super-Replications IV

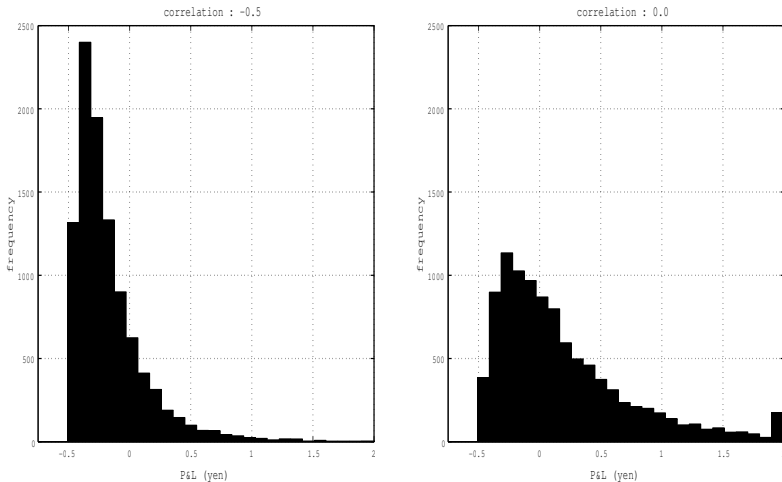


Figure 9 : 数値例:クロス通貨オプションのヘッジ戦略の損益分布

# Outline

- 1 複数資産を原資産とするデリバティブの優劣複製
- 2 経路依存型デリバティブの優劣複製
- 3 優劣複製取引戦略の改善
- 4 密度関数の補正

# 先行研究と本研究

## 背景と先行研究

### ● 背景

- 1-3 章の研究では、原資産価格の満期時点での分布は既知としたが、実際には部分的な情報しか得られない
- カリブレーションされたモデルにより補間・補外を行うことが多いが、漸近展開などの近似解手法は精度が十分でない場合は、裁定機会を生じるうる
  - 金利モデルとして広く使われている SABR モデル ([Hagan et al., 2002]) のオプション価格の近似式は、行使価格が 0 に近いところで、裁定機会を生ずる (密度関数が負の値をとる)

### ● 先行研究

- SABR モデルの裁定機会を生じない近似 ([Doust, 2012])
- ボラティリティ・サーフェスの補間・補外 ([Fengler, 2009],[Gatheral and Jacquier, 2013])

## 本研究の成果と貢献

- A New Improvement Scheme for Approximation Methods of Probability Density Functions, [Takahashi and Tsuzuki, 2014]
  - 密度関数の近似関数を、密度関数の条件を満たすように補正する方法を提案
    - 密度関数の条件は、ヒルベルト空間の言葉により記述
    - *Dijkstra's algorithm* ([Deutsch, 2001]) により計算
    - 特定のモデルや近似手法に依存しない

# Improvement for Approximation Methods of Density Functions I

原資産価格過程  $S$  が与えられたとし、時刻  $T$  の密度関数を  $f, I \subseteq \mathbb{R}$  を  $f$  の定義域とする。また、漸近展開などの近似的方法で、密度関数  $f$  の近似  $\tilde{f}$  が得られたとする。

問題:  $\tilde{f}$  を修正して、密度関数  $f$  の近似としてより好ましい関数  $\eta$  を求める

$\eta$  が満たすべき性質として以下が挙げられる。

(1)  $\int_I \eta(x) dx = 1$

(2)  $\eta \geq 0$

(3)  $\int_I x \eta(x) dx = S_0$  (金利・配当は 0 と仮定する)

(4)  $\int_I g_{K_n}(x) \eta(x) dx = C_{K_n}$  ( $C_{K_n}$  は市場で観測できる行使価格  $K_n$  のオプション価格  $g_K(x) := (x - K)_+$ ,  $n = 1, \dots, N$ )

(5)  $\eta = \tilde{f}$  on  $I_0 \subseteq I$  ( $I_0$  は  $I$  の適当な部分集合)

(6)  $\eta$  は  $f$  と同じ程度の fat tail をもつ

(1) と (2) は、密度関数として満たすべき条件、(3) と (4) は市場価格の再現性に関する条件である。多くの近似方法では、ATM 付近の精度はいいので、条件 (5) を課す。(6) は補外の情報である。

## Improvement for Approximation Methods of Density Functions II

近似関数  $\tilde{f}$  は条件 (1)-(6) を必ずしも満たさない.  $\tilde{f}$  を少し変化させて, 条件 (1)-(6) を満たすようにする. ここで, 関数間の距離を定義するために, 以下の内積をもつヒルベルト空間  $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \chi(x)dx)$  を導入する ( $\mathcal{M}$  はルベーグ可測集合全体):

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \int_I h_1(x)h_2(x)\chi(x)dx \text{ for } h_1, h_2 \in \mathcal{H}, \quad (62)$$

関数  $\chi : I \rightarrow [0, +\infty)$  は  $f$  と同じ tail を持つ関数とする. さらに, 条件 (6) は定量的な条件ではないため, 以下で置き換える.

(6-1)  $\eta \leq \chi$  on  $(0, K_L]$  ( $K_L$  は適当な正の数)

(6-2)  $\eta \leq \chi$  on  $[K_R, +\infty)$  ( $K_R$  は適当な正の数)

(注)  $\mathcal{H}$  の取り方は一意ではなく, 条件 (6-1),(6-2) の  $\chi$  と同じでなくてもよい.

## Improvement for Approximation Methods of Density Functions III

条件 (1)-(5),(6-1),(6-2) を  $\mathcal{H}$  の部分集合の条件として表すと,  
 $\eta/\chi \in \mathcal{K} := \mathcal{K}_D \cap \mathcal{K}_C \cap \mathcal{K}_T$ , である. ただし,

$$\mathcal{K}_D := \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \langle \varphi, 1_I \rangle = 1\} \cap \bigcap_{x \in I} \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \langle \varphi, \delta_x \rangle \geq 0\}, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_C := & \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \langle \varphi, id_I \rangle = S_0\} \cap \bigcap_{n \leq N} \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \langle \varphi, g_{K_n} \rangle = C_{K_n}\} \\ & \cap \bigcap_{x \in I_0} \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \langle \varphi, \delta_x \rangle = \tilde{f}(x)\} \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_T := & \bigcap_{x \in (0, K_L]} \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \langle \varphi, \delta_x \rangle \leq \chi(x)\} \\ & \cap \bigcap_{x \in [K_R, +\infty)} \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \langle \varphi, \delta_x \rangle \leq \chi(x)\}. \end{aligned} \quad (65)$$

$\tilde{\varphi} := \tilde{f}/\chi$  と置き, 集合  $P_{\mathcal{K}}(\tilde{\varphi})$  を以下で定義する (この集合の元はひとつなので,  $\mathcal{H}$  の元と同一視する)

$$P_{\mathcal{K}}(\tilde{\varphi}) := \{\varphi^* \in \mathcal{K} \mid \|\tilde{\varphi} - \varphi^*\| = \inf_{\eta \in \mathcal{K}} \|\tilde{\varphi} - \eta\|\}. \quad (66)$$

## Improvement for Approximation Methods of Density Functions IV

ここで,  $f^* := P_{\mathcal{K}}(\tilde{\varphi})\chi$  とすると, これは次の意味で元の近似関数  $\tilde{f}$  よりもよいことがわかる.

$$\|f/\chi - P_{\mathcal{K}}(\tilde{\varphi})\|^2 \leq \|f/\chi - \tilde{\varphi}\|^2, \quad (67)$$

または,

$$\int_I |f(x) - f^*(x)|^2 \frac{1}{\chi(x)} dx \leq \int_I |f(x) - \tilde{f}(x)|^2 \frac{1}{\chi(x)} dx. \quad (68)$$

集合  $\mathcal{K}$  は凸集合であるため, *Dykstra's algorithm* を使って求めることができる. 次に数値例を示す.

- (a) Monte Carlo,
- (b) 5th order Asymptotic Expansion (5th AE),
- (c) 3rd order Asymptotic Expansion (3rd AE),
- (d1)  $\tilde{f}$ : 5th AE(密), (d2)  $\tilde{f}$ : 5th AE(疎), (e1)  $\tilde{f}$ : 3rd AE(密), (e2)  $\tilde{f}$ : 3rd AE(疎)



## Improvement for Approximation Methods of Density Functions V

Strike	(a) IV%	(b)-(a)	(c)-(a)	(d1)-(a)	(d2)-(a)	(e1)-(a)	(e2)-(a)
20	34.5	1.8	10.8	0.4	0.4	3.0	2.9
40	26.4	0.5	4.6	0.1	0.1	2.3	2.3
60	21.5	0.3	2.2	0.2	0.2	1.8	1.8
80	18.1	0.2	1.0	0.3	0.3	1.0	1.1
100	15.6	0.2	0.5	0.3	0.4	0.6	0.7
120	14.0	0.2	0.2	0.3	0.5	0.3	0.4
140	13.2	0.3	-0.1	0.5	0.7	0.1	0.3
160	12.8	0.5	-0.4	1.0	1.3	-0.0	0.4
180	12.8	0.3	-0.4	1.6	1.8	0.4	0.9
200	13.0	-0.9	-0.3	1.9	2.0	1.0	1.3
220	13.2	-3.9	-0.4	1.9	2.0	1.3	1.5
240	13.4	-	-0.7	1.7	1.8	1.3	1.5
260	13.6	-	-1.3	1.5	1.5	1.2	1.3
280	13.8	-2.0	-2.0	1.1	1.1	0.9	1.0
300	14.0	-1.3	-2.8	0.6	0.6	0.5	0.5

Table 2 : 数値例:SABR model の Implied volatility の比較 (詳細は本文参照)

## Improvement for Approximation Methods of Density Functions VI

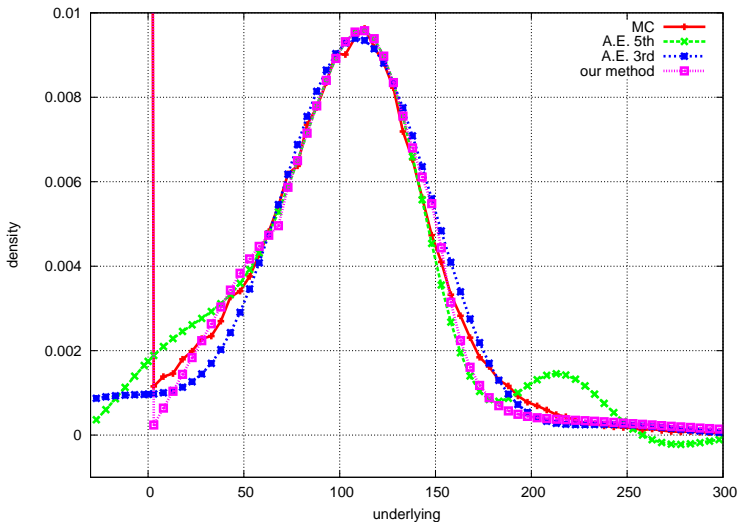


Figure 10 : 密度関数

# Reference I

- [Baldeaux and Rutkowski, 2010] Baldeaux, J. and Rutkowski, M. (2010).  
Static replication of forward-start claims and realized variance swaps.  
*Applied Mathematical Finance*, 17(2):99–131.
- [Beiglböck et al., 2013] Beiglböck, M., Labordère, P. H., and Penkner, F. (2013).  
Model-independent bounds for option prices - a mass transport approach.  
*Finance and Stochastics*.
- [Bennett and Kennedy, 2004] Bennett, M. N. and Kennedy, J. E. (2004).  
Quanto pricing with copulas.  
*Journal of Derivatives*, 12(1):26–45.
- [Bowie and Carr, 1994] Bowie, J. and Carr, P. (1994).  
Static simplicity.  
*Risk*, 7(8):45–49.
- [Brown et al., 2001] Brown, H., Hobson, D., and Rogers, L. C. G. (2001).  
Robust hedging of barrier options.  
*Mathematical Finance*, 11(3):285–314.
- [Carr and Chou, 1997] Carr, P. and Chou, A. (1997).  
Breaking barriers.  
*Risk*, 10(9):139–145.
- [Carr and Crosby, 2010] Carr, P. and Crosby, J. (2010).  
A class of levy process models with almost exact calibration of both barrier and vanilla fx options.  
*Quantitative Finance*, 10(10):1115–1136.
- [Carr et al., 1998] Carr, P., Ellis, K., and Gupta, V. (1998).  
Static hedging of exotic options.  
*Journal of Finance*, 53(3):1165–1190.
- [Carr and Madan, 2005] Carr, P. and Madan, D. (2005).  
A note on sufficient conditions for no arbitrage.  
*Finance Research Letters*, 2(3):125–130.

## Reference II

- [Chung and Wang, 2008] Chung, S.-L. and Wang, Y.-H. (2008).  
Bounds and prices of currency cross-rate options.  
*Journal of Banking & Finance*, 32(5):631–642.
- [Cousot, 2007] Cousot, L. (2007).  
Conditions on option prices for absence of arbitrage and exact calibration.  
*Journal of Banking and Finance*, 31(11):3377–3397.
- [Cox and Hobson, 2005] Cox, A. M. G. and Hobson, D. G. (2005).  
Local martingales, bubbles and option prices.  
*Finance and Stochastics*, 9(4):477–492.
- [Cox and Oblój, 2011a] Cox, A. M. G. and Oblój, J. (2011a).  
Robust hedging of double touch barrier options.  
*SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2:141–182.
- [Cox and Oblój, 2011b] Cox, A. M. G. and Oblój, J. (2011b).  
Robust pricing and hedging of double no-touch options.  
*Finance and Stochastics*, 15(3):573–605.
- [d’Aspremont and El-Ghaoui, 2006] d’Aspremont, A. and El-Ghaoui, L. (2006).  
Static arbitrage bounds on basket option prices.  
*Journal Mathematical Programming*, 106(3):467–489.
- [Davis and Hobson, 2007] Davis, M. H. A. and Hobson, D. G. (2007).  
The range of traded option prices.  
*Mathematical Finance*, 17(1):1–14.
- [Derman et al., 1995] Derman, E., Ergener, D., and Kani, I. (1995).  
Static options replication.  
*Journal of Derivatives*, 2:78–95.
- [Deutsch, 2001] Deutsch, F. (2001).  
*Best Approximation in Inner Product Spaces*.  
Springer New York, 1st edition.

## Reference III

- [Dhaene et al., 2002] Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M., Kaas, R., and Vyncke, D. (2002).  
The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory.  
*Insurance: Mathematics & Economics*, 31(1):3–33.
- [Doust, 2012] Doust, P. (2012).  
No-arbitrage sabr.  
*The Journal of Computational Finance*, 15(3).
- [Dupire, 2010] Dupire, B. (2010).  
The return(s) of super-replication.  
Presentation given at the ICBI Global Derivatives conference, Paris, 19th May 2010.
- [Fengler, 2009] Fengler, M. (2009).  
Arbitrage-free smoothing of the implied volatility surface.  
*Quantitative Finance*, 9(4):417–428.
- [Fink, 2003] Fink, J. (2003).  
An examination of the effectiveness of static hedging in the presence of stochastic volatility.  
*Journal of Futures Markets*, 23(9):859–890.
- [Gatheral and Jacquier, 2013] Gatheral, J. and Jacquier, A. (2013).  
Arbitrage-free svi volatility surfaces.  
*Quantitative Finance*, 14(1):59–71.
- [Giese, 2012] Giese, A. (2012).  
Quanto adjustments in the presence of stochastic volatility.  
*Risk*, pages 67–71.
- [H. Albrecher and Schoutens, 2005] H. Albrecher, J. Dhaene, M. G. and Schoutens, W. (2005).  
Static hedging of asian options under levy models: The comonotonicity approach.  
*Journal of Derivatives*, 12(3):63 – 72.
- [Hagan et al., 2002] Hagan, P., Kumar, D., Lesniewski, A., and Woodward, D. (2002).  
Managing smile risk.  
*Wilmott Magazine*, pages 84–108.

## Reference IV

- [Hirsa et al., 2003] Hirsa, A., Courtadon, G., and Madan, B. (2003).  
The effect of model risk on the valuation of barrier options.  
*The Journal of Risk Finance*, Winter:1–8.
- [Hobson, 1998] Hobson, D. (1998).  
Robust hedging of the lookback option.  
*Finance and Stochastics*, 2(4):329–347.
- [Hobson and Klimmek, 2012] Hobson, D. and Klimmek, M. (2012).  
Model independent hedging strategies for variance swaps.  
*Finance and Stochastics*, 16(4):611–649.
- [Hobson et al., 2005a] Hobson, D., Laurence, P., and Wang, T.-H. (2005a).  
Static arbitrage optimal sub-replicating strategies for basket options.  
*Insurance Mathematics and Economics*, 37:553–572.
- [Hobson et al., 2005b] Hobson, D., Laurence, P., and Wang, T.-H. (2005b).  
Static-arbitrage upper bounds for the prices of basket options.  
*Quantitative Finance*, 5(4):329–342.
- [Hobson and Neuberger, 2012] Hobson, D. and Neuberger, A. (2012).  
Robust bounds for forward start options.  
*Mathematical Finance*, 22(1):31–56.
- [Jäckel, 2009] Jäckel, P. (2009).  
Quanto skew.  
[www.jaeckel.org/QuantoSkew.pdf](http://www.jaeckel.org/QuantoSkew.pdf).
- [Jäckel, 2010] Jäckel, P. (2010).  
Quanto skew with stochastic volatility.  
[www.jaeckel.org/QuantoSkewWithStochasticVolatility.pdf](http://www.jaeckel.org/QuantoSkewWithStochasticVolatility.pdf).
- [K.C. Cheung and Linders, 2013] K.C. Cheung, J. Dhaene, A. K. and Linders, D. (2013).  
Ordered random vectors and equality in distribution.  
*Research report AFI-1377 FEB, KU Leuven*.

# Reference V

- [Kellerer, 1972] Kellerer, H. (1972).  
Markov-komposition und eine anwendung auf martingale.  
*Mathematische Annalen*, 198:99–122.
- [Laurence and Wang, 2003] Laurence, P. and Wang, T.-H. (2003).  
Sharp upper and lower bounds for basket options.  
*Applied Mathematical Finance*, 12(3).
- [Laurence and Wang, 2009] Laurence, P. and Wang, T.-H. (2009).  
Sharp distribution free lower bounds for spread options and the corresponding optimal subreplicating portfolios.  
*Insurance Mathematics and Economics*, 44(1):35–47.
- [Lee, 2004] Lee, R. W. (2004).  
The moment formula for implied volatility at extreme strikes.  
*Mathematical Finance*, 14(3):469–480.
- [Lipton and McGhee, 2002] Lipton, A. and McGhee, W. (2002).  
Universal barriers.  
*Risk*, 15:81–85.
- [Maruhn, 2009] Maruhn, J. H. (2009).  
*Robust Static Super-Replication of Barrier Options*.  
Walter de Gruyter.
- [McCloud, 2011] McCloud, P. (2011).  
The cms triangle arbitrage.  
*Risk*.
- [Neuberger and Hodges, 2000] Neuberger, A. and Hodges, S. (2000).  
Rational bounds on the prices of barrier options.  
Technical Report, London Business School.

## Reference VI

- [Schoutens et al., 2005] Schoutens, W., Simons, E., and Tistaert, J. (2005).  
Model risk for exotic and moment derivatives.  
In Kyprianou, A., Schoutens, W., and Wilmott, P., editors, *Exotic Options and Advanced Lévy Models*,  
pages 67–97. Wiley, New York.
- [Takahashi and Tsuzuki, 2011] Takahashi, A. and Tsuzuki, Y. (2011).  
Rebalancing static super-replications.  
Working paper, CARF-F-245, the University of Tokyo.
- [Takahashi and Tsuzuki, 2014] Takahashi, A. and Tsuzuki, Y. (2014).  
A new improvement scheme for approximation methods of probability density functions.  
*Journal of Computational Finance*.  
forthcoming.
- [Tsuzuki, 2011] Tsuzuki, Y. (2011).  
Pricing bounds on quanto option.  
<http://papers.ssrn.com/abstract=1755275>.
- [Tsuzuki, 2013] Tsuzuki, Y. (2013).  
On optimal super-hedging and sub-hedging strategies.  
*International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 16(6).
- [Tsuzuki, 2014a] Tsuzuki, Y. (2014a).  
No-arbitrage bounds on two one-touch options.  
<http://papers.ssrn.com/abstract=2266711>.
- [Tsuzuki, 2014b] Tsuzuki, Y. (2014b).  
Pricing bounds on barrier options.  
*Journal of Futures Markets*, 34(12):1170–1184.
- [Tsuzuki, 2015] Tsuzuki, Y. (2015).  
No-arbitrage conditions for barrier options.  
Working paper.